Dossier n°81 : Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer ; exemples d'applications à l'obtention d'encadrements d'une fonction.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 22 novembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Le calcul intégral est introduit dans les classes de Terminales S et ES.

Dans les deux cas, cette notion est introduite comme une notion d'aire puis approfondie avec le calcul de primitives.

Je choisis de situer ce dossier au niveau de la Terminale S pour disposer d'un maximum d'outils de calcul intégral.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

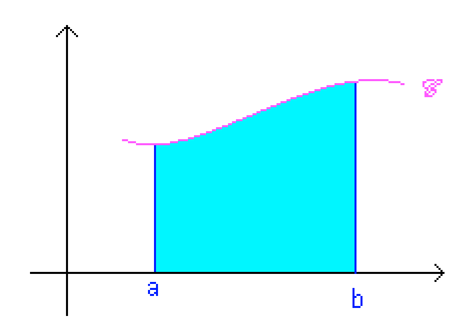
Comme je l'ai expliqué précédemment, on définit désormais l'intégrale d'une fonction par une notion d'aire comme suit :

Définition 1 :

Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle [a ;b] et C sa courbe représentative.

L'aire sous la courbe C sur l'intervalle [a ;b] est l'aire du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation x = a et x = b.

On note $\int_a^b f(x)dx$ cette aire et on lit **intégrale (ou somme) de a à b de f**.



On introduit ensuite la notion de primitive et on fait le lien avec l'intégration par le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Les élèves savent donc calculer les intégrales de fonctions dont il savent déterminer des primitives.

Le problème est, qu'en pratique, il n'est pas toujours possible de déterminer une primitive de la fonction à intégrer.

L'objectif de ce dossier est de présenter des exemples d'encadrements d'intégrales pour lesquelles on ne sait pas déterminer de primitives de la fonction à intégrer.

On utilisera pour cela des encadrements de la fonction à intégrer et le théorème suivant :

Théorème 3 :

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ;b] avec $a \leq b$.

1. *Positivité*

Si $f \geq 0$ sur [a ;b] alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2. *Ordre :*

Si $f \leq g$ sur [a ;b] alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3. *Inégalités de la moyenne :*

(i) Si, pour tout $x \in [a ;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

(ii) Si, pour tout $x \in [a ;b]$, $|f(x)| \leq M$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

On pourra notamment obtenir des encadrements de fonctions.

II.2 A propos des exercices.

J'ai choisi de vous présenter trois exercices classés par ordre de difficulté croissante :

- l'exercice n°1 propose d'encadrer une intégrale et d'en déduire une valeur approchée ;
- l'exercice n°2 propose d'encadrer une fonction définie au moyen d'une intégrale par deux fonctions et d'en déduire une valeur approchée de sa limite ;
- l'exercice n°3 propose de déterminer un encadrement de sin x pour x réel positif.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Déterminer un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$ par deux réels puis une valeur approchée de I à 3×10^{-2} près.

Méthode :

- Encadrement de $x \to e^{-x}$ déduit de l'étude de deux fonctions ;
- Encadrement de $x \to e^{-x^2}$
- Encadrement de $x \to \frac{e^{-x^2}}{1+x}$
- Encadrement et valeur approchée de I

Outils :

- Théorème 3 ;
- *Linéarité de l'intégrale :*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b. Alors pour tous réels α et β :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer un encadrement de la fonction F : $x \to \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt$ définie sur [0 ;+∞ [puis un encadrement de sa limite l en +∞ (dont l'existence est admise).

Méthode :

- Encadrement de ln(1+a) pour a > 0
- Encadrement de F(x) par deux intégrales puis par deux fonctions
- Encadrement et valeur approchée de l à 10^{-1} près.

Outils :

- Théorème 3 ;
- *Théorème 4 :*
  Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a ∈ I.
  La fonction F : $x \to \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f sur i qui s'annule en a.
- *Proposition 5 :*
  Soient f et g deux fonctions telles que pour tout x, f(x) ≤ g(x).
  Si f et g admettent des limites en a alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

III.3 Exercice n°3.

But : Déterminer un encadrement de sin x pour x positif.

Méthode : Réaliser plusieurs intégration de l'inégalité cos x ≤ 1.

Outils :

- Théorème 3 ;
- Théorème4.

Cet exercice est donné sans indications, c'est à l'élève de penser à utiliser le calcul intégral.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°136 p 233, Transmath T[erm] S 2002).

On se propose d'encadrer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$.

1. En étudiant les variations des fonctions u et v définies sur l'intervalle [0 ;1] par $u(x) = e^{-x} + x - 1$ et $v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$, prouver que pour tout réel x dans [0 ;1], $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.
2. En déduire un encadrement de e^{-x^2} lorsque x est dans l'intervalle [0 ;1] puis prouver que pour tout x dans l'intervalle [0 ;1] :

$$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$$

3. a) Vérifier que, pour tout x dans l'intervalle [0 ;1], $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$.

   b) En déduire que $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2}\ln 2$ puis donner une valeur approchée de I à 3×10^{-2} près.

IV.2 Exercice n°2 (n°96 p 143, Terracher T[erm]S 2002).

Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ;+∞[, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt$ (on ne cherchera pas calculer F(x)).

1. Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle [0 ;+∞[.
2. Soit a un réel strictement positif.
   a) Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ;1+a], on a : $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.
   b) En déduire que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.
3. Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 2 que :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$$

puis : $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

4. On admet que la limite de F(x) lorsque x tend vers +∞ existe et est un nombre réel noté l. Etablir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$. En déduire une valeur approché de l à 10^{-1} près.

IV.3 Exercice n°3 (n°4 p 239, Terracher T[erm]S 1998).

A partir de l'inégalité (connue) $\cos x \leq 1$ et à l'aide d'intégrations successives, montrer que, pour tout réel x positif :

$$\sin x \leq x \text{ et } 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$$

En déduire l'encadrement, pour tout réel x positif :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$